Filosofien og matematikken bag Google

Med fokus på PageRank.

Jakob Lindblad Blaavand

10. april 2010

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

1 Indledning

En internet-søgemaskine er god, hvis den først og fremmest kan søge blandt al information på internettet. Derudover skal den være hurtig til at finde resultaterne og måske vigtigst af alt, at den skal vise de mest relevante resultater først. Sat lidt på spidsen er de to første krav blot et spørgsmål om nok computerkraft. Ordningen af søgeresultaterne mere subtilt og var det, der gjorde Google så speciel i forhold til andre søgemaskiner, da Sergey Brin og Lawrence Page startede Google tilbage i 1997. Hvis jeg på Google søger på *matematik* og *århus*, får jeg 189.000 resultater, og de kommer svimlende hurtigt – efter kun 0.18 sekunder. Når jeg søger på disse to ord vil jeg naturligvis have fat i *Institut for Matematiske Fag* på *Aarhus Universitet*'s hjemmeside. Google giver mig også denne hjemmeside som det første søgeresultat. Men hvordan kan Google gætte det fra blot *matematik* og *århus*? Dette mindre mysterie skal vi undersøge i denne note.

Spørgsmålet er altså, hvordan man får sorteret alle hjemmesiderne efter en eller anden form for vigtighed og troværdighed. Det ville være mest demokratisk, hvis man kunne sætte en stor gruppe mennesker til at lave denne sortering, men resultatet ville være afhængigt af gruppens sammensætning af personer. Udover en uoverskuelig tidshorisont med at mennsker skal tage stilling til vigtigheden og troværdigheden af 25 milliarder sider, er en sådan liste altså underlagt en subjektiv vurdering, som er uhensigtsmæssig. Løsningen er, at få Internettet til selv at ordne siderne efter vigtighed.

Størstedelen af denne note er en forklaringen af filosofien bag Google, krydret med en smule matematik. I afsnit 9 ser vi på den konkrete matematik. Her bliver alle påstande fra hovedteksten bevist. Beviserne er alene baseret på lineær algebra, og eneste forudsætning for at kunne forstå beviserne er, at kende til egenværdier og egenvektorer for en matrix. Hovedteksten er stærkt inspireret af [1], mens det matematiske afsnit er baseret på [2]. Hvis du vil vide mere om lineær algebra er [3] et godt udgangspunkt.

2 Hvilke sider er vigtigst?

Hvis du har lavet en hjemmeside, så har du også lavet links til andre hjemmesider. Det har du gjort fordi du synes de hjemmesider du linker til indeholder vigtig information af den ene eller den anden karakter. Når du derfor laver et link til en hjemmeside, siger du samtidig med, at du mener siden er vigtig. Hvis vi derfor kan kortlægge hele Internettets link-struktur, så kan vi få alle hjemmesideforfatteres mening om, hvilke sider der er vigtige. På den måde kan vi forfølge vores første demokratiske tanke om, at en stor gruppe mennesker skal være med til at bestemme, hvad der er vigtigt: hjemmesidens placering på vigtighedslisten er bestemt af *hvormange* og *hvilke* hjemmesider der linker til den. Hvis listen også skal afspejle en form for troværdighed, så er det også nødvendigt, at tage i betragtning, hvilke sider der linker til den. Fx er det meget mere troværdigt for en hjemmeside at en stor hjemmeside som jp.dk linker til den, end, at jeg som privatperson linker til hjemmesiden.

Altså, hvis vi har en side P, kalder vi som samlet betegnelse for troværdigheden og vigtigheden, af siden for dens PageRank, $I(P)$. Dette er et tal, og når søgeresultaterne i en søgning skal vises bliver hjemmesiderne sorteret efter denne PageRank. Men hvordan skal vi bestemme PageRank fra de ovenstående betragtnigner? Antag, at siden P_j har l_j links. Hvis et af disse links peger på siden P_i så overfører P_j en $1/l_j$'te del af dens PageRank til P_i. Så PageRanken af P_i, $I(P_i)$, er summen af bidrag fra alle siderne der linker til P_i.

Altså, hvis mængden af sider der linker til P_i betegnes B_i er PageRanken givet ved

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}. \tag{1}$$

Vi er nu kommet til et problem. En sides PageRank bestemmes af andre siders PageRank. Men hvis vi nu har to sider der linker til hinanden - hvordan får vi så bestemt hver deres PageRank? Det er som spørgsmålet om, hvad der kom først: hønen eller ægget? Skal vi så til at skrotte vores håb om, at lave en vægtning af sider efter de links der findes på en hjemmeside? Vi har endnu ikke brugt noget matematik på vores situation, og hvis vi gør det, så kan vi heldigvis løse det. Men for at gøre det skal vi kende til lidt lineær algebra.

3 Lineær Algebra

Definition 1. En $m \times n$-matrix, A, er en samling af n reelle vektorer af dimension m (altså vektorer med længde m), sat op ved siden af hinanden i en tabel. Hvis A består af de n vektorer $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$, skrives A som

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \ldots & \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \ldots & v_{m,n} \end{bmatrix}$$

hvor hver vektor, v_i, er givet ved

$$\boldsymbol{v_i} = \begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{m,i} \end{bmatrix}.$$

Eksempel 2. Har vi to vektorer

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

sammensættes de til matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Matricer er matematiske objekter, der kan regnes med, lig så vel som vi kan regne med tal. Men da matricer er forskellige fra almindelige reelle tal, så er de to regneoperationer plus og gange også nogle andre end man er vant til.

Definition 3. Lad A og B være to $m \times n$-matricer. Da defineres $A + B$ til at være

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \ldots & b_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \ldots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \ldots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \ldots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Altså er definitionen af plus meget intuitiv: man adderer to matricer ved at adderer indgangene parvist.

Eksempel 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Derimod er definitionen af gange en smule mere spøjs:

Definition 5. Lad $A = (a_{ij})$ være en $m \times n$-matrix (lavet af n vektorer der har længde m) og $B = (b_{ij})$ være en $n \times r$-matrix, så er produktet $AB = C = (c_{ij})$ den $m \times r$-matrix, hvis indgange er givet ved

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Altså er den ij'te indgang i matricen C givet som prikproduktet mellem den i'te rækkevektor i A og den j'te søjlevektor i B.

Eksempel 6. Definitionen af gange er nemmere at forstå, hvis man ser et eksempel. Hvis

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

kan man ikke gange A med B, da antallet af søjler i A ikke er det samme som antallet af rækker i B. Men omvendt ses det, at antallet af søjler i B er lig antallet af rækker i A, så derfor kan vi godt udregne BA:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

Hermed kan vi også se, at egenskaben ved de reelle tal, $AB = BA$, ikke gælder generelt for matricer. Du kan finde en nogle matricer, hvor det gælder, at $AB = BA$, men det er undtagelsen fremfor reglen. Det der gik galt i vores eksempel, var, at det ikke gav mening at udregne AB, da dimensionerne ikke passede. Men er A og B to kvadratiske matricer af dimension n (består altså af n vektorer sat op ved siden af hinanden, der hver har længde n), så giver det fint mening at udregne AB og BA - men igen gælder der ikke generelt, at de to matricer der kommer ud af de to regnestykker er ens.

Eksempel 7. En vektor er også en matrix, så det at gange en vektor på en matrix kan gøres på samme måde som vi gjorde ovenfor. Hvis derfor

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

så er

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Opgave 8. Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- Beregn AB og BA.
- Beregn C^2, C^3, C^4.

- Beregn DAB på to måder:
  - Gang AB med D fra venstre.
  - Beregn DA og gang med B fra højre.

Dette skulle være nok lineær algebra til at sætte os i stand til at forstå, hvordan Googles PageRank virker.

4 Hyperlinkmatricen

Vi kender nu til matrix-begrebet, og det vil vi nu indføre, for at løse problemet med beregning af PageRank. Vi definerer nu en matrix $H = (H_{ij})$, som kaldes *hyperlinkmatricen*. Hver række og søjle repræsenterer en webside. Hvis den i'te række er websiden P_i så er den i'te søjle det også. Altså er H en kvadratisk matrix. I den ij'te indgang står der $1/l_j$ hvis $P_j \in B_i$ og 0 ellers. Dvs. hvis P_j linker til P_i står der $1/l_j$ i den ij'te indgang og 0 hvis P_j ikke linker til P_i. Hvis man ser på den j'te *søjle*, så viser denne vektor, hvilke sider der linkes til fra P_j. Hvis man derimod ser på den j'te *række* kan man aflæse hvilke sider der linker til P_j. Det skal bemærkes, at hvis en hjemmeside ikke linker til nogle andre hjemmesider, så alle indgange i den tilhørende søjle 0.

Hyperlinkmatricen er altså helt speciel i den forstand, at alle indgangene er større end eller lig nul, og summen af alle indgangene i en søjle er 1, medmindre den side søjlen repræsenterer ej har nogle links.

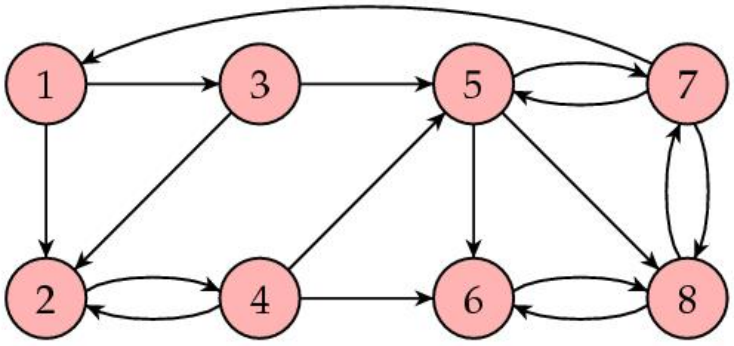
Vi kan nu lave vektoren $I = [I(P_i)]$ hvis indgange er PageRanks. Husker vi tilbage på definitionen af en sides PageRank, formel (1), og hvordan to matricer ganges sammen, så har vi, at vores PageRank-vektor opfylder følgende ligning:

$$I = HI,$$

I virkeligheden har vi her n ligninger med n ubekendte, hvor n er antallet af hjemmesider på nettet. Altså *rigtig* mange ligninger der skal løses for at finde alle hjemmesiders PageRank. Heldigvis er I det vi kalder en egenvektor for H med egenværdi 1 og den slags vektorer er helt specielle, og vi har nogle teknikker til at finde dem – dermed bliver det altså overskueligt at skulle løse ligningerne.

5 Miniature-web

Lad os se på et eksempel, hvor vi har otte websider, der linker til hinanden og udgør et internet i legetøjsstørrelse. Linksene er repræsenteret ved pile.



Den tilhørende matrix og egenvektor er

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad I = \begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{bmatrix}$$

Da side 1 linker til side 2 og 3 står der $\frac{1}{2}$ på plads 2 og 3 i første søjle og 0'er på resten af pladserne. Side 2 kun linker til side 4 og derfor står der 1 på plads 4 i anden søjle og 0'er på resten af pladserne, osv.

I dette tilfælde viser PageRank-vektoren, I, at side nr 8 er den vigtigste, fordi det største tal står på plads 8. Det kan tildels forklares med, at der er tre sider der linker til side 8. Men side 2, 5 og 6 har også tre links til sig, men nr 8 er den vigtigste fordi, de websider der peger på nr 8, selv har mange sider der peger på sig. Her er det altså igen troværdigheden af siderne der er med til afgøre PageRanken og ikke alene antallet af links.

6 Beregning af I

Der findes mange måder at finde egenvektorer til kvadratiske matricer på. Men når vi i dette tilfælde har en hyperlinkmatrix med 25 milliader rækker og 25 milliader søjler, virker alle beregningsmetoder håbløse, og tidskrævende. Dog er vi så heldige, at der i gennemsnit kun er 10 links per side, så langt størstedelen af indgangene i H er nul. Derfor bruger man det der hedder *potensmetoden*, til at finde egenvektoren I til egenværdien 1.

For at bruge potensmetoden, skal man vælge sig en vektor I^0, som man mener kunne være en kandidat til I, og så laver man følgen af vektorer I^k givet ved

$$I^{k+1} = HI^k = H^k I^0.$$

Hvis H er en særlig pæn matrix, vil I^k'erne vektor nærme sig egenvektoren I, når k bliver stor. Selv for Googles store matrix skal man kun op på ca. $k = 60$ for at få en god approksimation til I.

I eksemplet ovenfor er de første elementer i følgen beregnet for $k = 60$ og $k = 61$.

I^0	I^1	I^2	I^3	I^4	$\cdots$	I^{60}	I^{61}
1	0	0	0	0.0278	$\cdots$	0.06	0.06
0	0.5	0.25	0.1667	0.0833	$\cdots$	0.0675	0.0675
0	0.5	0	0	0	$\cdots$	0.03	0.03
0	0	0.5	0.25	0.1667	$\cdots$	0.0675	0.0675
0	0	0.25	0.1667	0.1111	$\cdots$	0.0975	0.0975
0	0	0	0.25	0.1806	$\cdots$	0.2025	0.2025
0	0	0	0.0833	0.0972	$\cdots$	0.18	0.18
0	0	0	0.0833	0.3333	$\cdots$	0.295	0.295

7 Vigtige spørgsmål

Nu har vi altså fundet en relativt effektivt måde at beregne I på. Men med den måde vi har valgt at beregne I på, vælger vi os et startpunkt for en følge, der så tilnærmer sig

egenvektoren. Men på dette tidspunkt skal vi stille os selv, tre centrale spørgsmål:

- Vil følgen I^k altid konvergere?
- Er grænsevektoren af I^k uafhængig af startvektoren I^0?
- Indeholder I rent faktisk den informationen vi vil ha'?

At en følgen af vektorer konvergerer betyder, at talværdien i indgangene i vektorerne vil stabilisere sig ved et bestemt tal, som det ses af ovenstående eksempel. Hvis vi ser på den sidste indgang i følgen af vektorer fra eksemplet ovenfor, så ses det, at talværdien starter med at være mindre end værdien den stabiliserer sig ved, for derefter at blive større end den. Man kunne godt forestille sig, at der fandtes en webstruktur og en startvektor, der i kombination gjorde, at fx den sidste indgang ikke ville stabilisere sig. Det ville give et problem, for så kan vi altså ikke sige, at vi har fundet vores egenvektor. Da gælder det ikke, at $HI = I$. Derfor er det altså nødvendigt at undersøge for konvergens.

Svaret på alle tre ovenstående spørgsmål, er desværre nej. Men det, der kommer til at rede os, er at svaret på tredje spørgsmål er nej. Vi har nemlig ikke helt fundet frem til den information som vi satte os for at finde – men vi meget tæt på.

8 Googlematricen

Tidligere har vi opfattet PageRank som et mål for, hvor vigtig en side er, beregnet ud fra vigtigheden af de sider der peger på den. Et forsøg på at bruge internettets linkstruktur til have en demokratisk afgørelse af hvilke sider der er vigtigst og mest troværdig. Men her har vi jo kun taget højde for forfatterne af hjemmesider, hvis vi skulle være helt demokratiske skulle vi også have brugerne af internettet med – altså surferne. Selvfølgelig er der et stort overlap mellem forfattere og brugere, men selvom man synes at en bestemt hjemmeside er vigtig, er det jo ikke sikkert man vil linke til den, hvis nu ens hjemmeside har et meget konkret formål.

Vi vil nu tage hyperlinkmatricen som udgangspunkt, og ændre den en smule så vi får en matrix, hvor vi kan svare ja på alle spørgsmålene fra ovenstående, og hvor vi altså får indkodet websurfernes stemme i afgørelsen af, hvad der er vigtigt. Vores udgangspunkt er, at vi udfra H vil konstruere en matrix G, og løse ligningssystemet $GI = I$ – dette I er vores rigtige PageRank-vektor.

Vi forestiller os, at vi tager en tilfældig surftur på nettet. Vi starter på siden P_j som har l_j links. Vi vælger så tilfældigt et af de l_j links. Et af linksene er til siden P_i. Dermed er sandsynligheden for at vi rammer P_i når vi står på P_j altså $1/l_j$.

Forfølger vi denne tanke, så kan PageRank $I(P_j)$ som sandsynligheden for, at man tilfældigvis surfer forbi på siden, hvis man bare klikker rundt på må og få på nettet. Det giver ganske god mening, for hvis du surfer efter noget bestemt information, så vil du uværgeligt ende på de samme sider flere gange. Altså er de sider vigtigere end andre, og disse siders PageRank skal værre højere. Dog giver denne fortolkning af PageRank os et problem: hvis vi på vores surftur støder på en side, der ikke linker til andre websider, hvad gør vi så? For at kunne fortsætte, så forestiller vi os, at sådan en side uden links til andre sider, rent faktisk linker til alle sider på hele nettet. Hvis vi tænker tilbage på vores hyperlinkmatrix, så betyder det, at den søjle der repræsenterede en side uden links ville have lutter 0'er. Nu bliver hele denne søjle erstattet med en vektor med $1/n$ på hver plads, hvor n er antallet af sider på nettet. Denne nye matrix kalder vi S. Det betyder, at vi kan skrive S som $S = H + A$, hvor A er en matrix, med lutter 0'er - bortset fra de søjler der repræsenterer websider uden links, hvor der i stedet står $1/n$ i hver indgang.

Har vi nu fået simuleret, hvordan en websurfer opfører sig på nettet? I det store hele, fordi man følger links på de sider man besøger, og hvis der ikke er nogle links, så vælges en tilfældig af nettets mange websider. Men på en surfetur, så vælger man ofte anden side på nettet fremfor bare, at vælge en af de sider der linkes til. Vi kan formulere dette matematisk ved at vælge et tal, α, mellem 0 og 1, som er sandsynligheden for at websurferen gør som vi har forudsagt med matricen S: vælger en af de sider der linkes til, eller hvis han kommer til en side uden links, så vælges en tilfældig af nettets mange sider. Dermed er der sandsynlighed $1-\alpha$ for, at websurferen gør noget andet: vælger en tilfældig af nettets websider. Det hele samler vi i *Googlematricen*:

$$G = \alpha S + (1-\alpha)\frac{1}{n}1$$

hvor 1 er en matrix af samme dimension som S, men som lutter 1-taller i alle indgangene.

Variablen α er ret vigtig, for den styrer hvor stor indfyldelse Internettets hyperlinkstruktur skal have i Googlematricen. Fx vil $\alpha = 1$ give den oprindelige hyperlinkstruktur, og $\alpha = 0$ giver en webstruktur helt uden links.

Googlematricen giver den hidtil mest realistiske beskrivelse af en websurfers adfærd på nettet. Det er naturligvis afhængigt af, at vi finder en rimelig værdi til α. Google bruger $\alpha = 0.85$, der betyder, at der er 85% sandsynlighed for, at en websurfer følger et link på en hjemmeside, og 15% sandsynlighed for, at han vælger en tilfældig hjemmeside.

8.1 Beregning af I

Så langt så godt. Vi har fået lavet os en matrix G der kan simulere er websurfers adfærd. Hvis vi nu kan finde egenvektoren I med egenværdien 1, altså finde den vektor så $GI = I$, så har vi fundet vores PageRank vektor. I afsnit 9 ser vi, at der findes uendeligt mange løsninger til $GI = I$. Men hvis vi vil fortolke PageRank som en sandsynlighed for at en hjemmeside bliver besøgt på en tilfældig surftur, så skal PageRank jo være et positivt tal, og hvis vi lægger PageRanks for alle hjemmesider sammen, skal vi have 1. Med disse ekstra antagelser kan vi vise, at der findes præcist en løsning til $GI = I$ og denne løsning kan findes med potensmetoden. For at potensmetoden virker skal vi altså vise, at følgen I^k vil konvergere mod vores PageRank-vektor I, der opfylder $GI = I$ og den ekstra antagelse. Derudover skal vi vise, at grænsevektoren for I^k ikke afhænger af valget af startvektor. Det vil blive gjort i afsnit 9.

Som sagt vil vi bruge potensmetoden, og husker vi på, at $S = H + A$, bliver

$$G = \alpha H + \alpha A + \frac{1-\alpha}{n}1,$$

og dermed er

$$GI^k = \alpha H I^k + \alpha A I^k + \frac{1-\alpha}{n}1I^k.$$

Da de fleste af indgangene i H er nul, skal der i gennemsnit kun summeres 10 tal i hver af indgangene i produktet HI^k. Desuden er alle rækker i A ens, så AI^k er en vektor med samme tal i hver indgang, så prikproduktet mellem I^k og en række i A skal kun beregnes en enkelt gang. Det samme er gældende for 1, der også har ens rækker.

Hastigheden af I^k's konvergens afhænger af størrelsen af α. Konvergensen er hurtig hvis α er lille, og langsom når den er tæt på 1. Med valget af $\alpha = 0.85$ har Google indgået et kompromis mellem, at få så meget som muligt af Internettets hyperlinkstruktur med, og hastigheden hvormed I kan beregnes. Det viser sig, at k skal ligge mellem 50 og 100 for at

vi kan få tilpas god approksimation til I. Google siger selv, at det tager dem et par dage at beregne I.

I og med, at nettet er en dynamisk størrelse, hvor der hele tiden bliver tilføjet og slettet indhold, så vil en PageRank vektor være forældet sekundet efter, at beregningen af den er startet. Rygterne vil derfor vide, at Google beregner en ny PageRank-vektor en gang i måneden.

9 Matematiske beviser

I dette afsnit vil vi bevise påstandene omkring potensmetoden og eksistensen af en PageRank-vektor. Først og fremmest det mest essentielle spørgsmål. Findes der overhovedet en løsning til $GI = I$ der samtidig opfylder at $\sum_{i=1}^{n} I(P_i) = 1$ og $I(P_i) > 0$? Dette er et ligningssytem med $n+1$ ligninger og n ubekendte. Som udgangspunkt er det ikke sikkert, at vi kan finde en sådan løsning. I tilfælde af, at vi kan finde en løsning, er vi så sikre på at den er entydig? Desuden skal vi se, at potensmetoden virker og er uafhængig af valget af startvektor.

I det følgende vil jeg bruge betegnelsen $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ for summen af den numeriske værdi af indgangene i en vektor. $\|x\|_1$ kaldes for 1-længden af x.

Proposition 9. Hvis $G = (g_{ij})$ er en matrix med $g_{ij} > 0$ for alle i, j og alle søjler summer til 1, da er 1 en egenværdi for G og ligningen $Gx = x$ har en løsning, hvor alle indgange i x er positive, særligt findes en løsning med $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Bevis. Rækkerne i G^T summer alle til 1, så vektoren $v = (1, 1, \ldots, 1)^T$ er en egenvektor for G^T med egenværdien 1, så $G^T v = v$. Dermed er 1 en rod i $\det(G^T - \lambda Id)$, og da $\det(G^T - \lambda Id) = \det(G - \lambda Id)$ er 1 altså også en egenværdi for G.

Helt generelt så gælder der, at $|\sum_i y_i| \leq \sum_i |y_i|$ og hvis y_i'erne har blandede fortegn er uligheden skarp.

Lad $x \in V_1(G)$ være en egenvektor i egenrummet tilhørende egenværdien 1 for G. Antag, at der er forskellige fortegn i x's indgange.

Da $x = Gx$ er $x_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j$ og da x_i'erne har blandede fortegn har $g_{ij} x_j$'erne blandede fortegn, da $g_{ij} > 0$. Vi har altså en streng ulighed $|x_i| < \sum_{j=1}^{n} G_{ij} |x_j|$, og derfor har vi

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} g_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

hvilket er en modstrid.

Altså har alle indgange i x samme fortegn. Særligt findes en vektor i $V_1(G)$ med alle indgangene positive, og dermed også en med 1-længde 1. □

Ovenstående proposition viser altså eksistensen af en løsning til ligningssystemet $GI = I$ og $\|I\|_1 = 1$ og alle indgange i I er positive. Hvis $\dim V_1(G) = 1$ så findes kun én løsning. Denne løsning er vores PageRank-vektor.

For at kunne vise, at $\dim V_1(G) = 1$ skal vi først have vist følgende generelle lemma.

Lemma 10. Lad v og w være lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Der findes reelle tal s, t så $x = sv + tw$ har både positive og negative indgange.

Bevis. Da v, w er lineært uafhængige er $v \neq 0 \neq w$. Lad $d = \sum v_i$. Hvis $d = 0$ indeholder v forskellige fortegn og $s = 1$ og $t = 0$ opfylder det ønskede.

Hvis $d \neq 0$ defineres $s = \frac{-\sum_i w_i}{d}$ og $t = 1$. Da v, w er lineært uafhængige er $x = sv + tw \neq 0$, men det er samtidig klart at $\sum_i x_i = 0$, så x_i'erne må have blandede fortegn. □

Nu er vi i stand til at bevise entydigheden af PageRank-vektoren.

Proposition 11. Hvis $G = (g_{ij})$ er en kvadratisk matrix med $g_{ij} > 0$ og $\sum_i g_{ij} = 1$ for alle j er $\dim V_1(G) = 1$.

Bevis. Antag, at der findes to lineært uafhængige vektorer $v, w \in V_1(G)$. Pr. lemma 10 findes s, t så komponenterne af $x = sv + tw$ har blandede fortegn. Men pr. Proposition 9 vil ethvert $x \in V_1(G)$ have enten kun positive eller kun negative komponenter, hvilket er en modstrid.

Altså vil en basis for $V_1(G)$ kun bestå af en enkelt vektor, og $\dim V_1(G) = 1$. □

Vi har nu bevist, at der findes en entydig PageRank-vektor. Spørgsmålet er nu blot, om vi kan finde den med potensmetoden beskrevet ovenfor.

Proposition 12. Lad $G = (g_{ij})$ være en kvadratisk matrix med $g_{ij} > 0$ og $\sum_{i=1}^n g_{ij} = 1$ for alle j, og lad V være underrummet i $\mathbb{R}^n$ bestående af vektorer v så $\sum_i v_i = 0$. Da er G matrixrepræsentationen af en lineær transformation $G : V \to V$ og der findes et $0 \leq c < 1$ så $\|Gv\|_1 \leq c\|v\|_1$ for alle $v \in V$.

Bevis. Lad os først se, at G tager elementer i V til elementer i V. Lad $w = Gv$, så $w_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} v_j$ og

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n g_{ij} = \sum_{j=1}^n v_j = 0.$$

Dermed er $w \in V$ og $G : V \to V$.

Nu til vurderingen, som er en smule besværlig at vise.

$$\|w\|_1 = \sum_{i=1}^n e_i w_i = \sum_{i=1}^n e_i \sum_{j=1}^n g_{ij} v_j,$$

hvor $e_i = \operatorname{sgn}(w_i)$ og e_i'erne er ikke alle ens, da $\sum_i w_i = 0$, da $w \in V$ – medmindre $w = 0$, hvor uligheden klart gælder.

$$\|w\|_1 = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n e_i g_{ij} = \sum_{j=1}^n a_j v_j,$$

hvor $a_j = \sum_{i=1}^n e_i g_{ij}$.

Da e_i'erne ikke alle er ens, at $\sum_{i=1}^n g_{ij} = 1$ og da $0 < g_{ij} < 1$ er det klart, at

$$-1 < -1 + \min_i g_{ij} \leq a_j \leq 1 - \min_i g_{ij} < 1.$$

Vi har altså, at $|a_j| \leq |1 - \min_i g_{ij}| < 1$, og lad derfor $c := \max_j |1 - \min_i g_{ij}|$ for så er $|a_j| \leq c < 1$ for alle j. Dermed har vi nu, at

$$\|w\|_1 = \sum_{j=1}^n a_j v_j = |\sum_{j=1}^n a_j v_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_j||v_j| \leq c \sum_{j=1}^n |v_j| = c\|v\|_1,$$

hvormed det ønskede er vist. □

Vi kan nu afslutte dette matematiske afsnit med en sætning der indeholder svar på alle spørgsmål stillet ovenfor.

Sætning 13. *Enhver kvadratisk matrix $G = (g_{ij})$ med $0 < g_{ij} < 1$ og $\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1$ for alle j, har en entydig egenvektor I tilhørende egenværdien 1, der yderligere kun har med positive indgange og $\|I\|_1 = 1$. Vektoren I kan beregnes ved $I = \lim_{k\to\infty} G^k x_0$, hvor x_0 er en vektor med positive indgange og $\|x_0\|_1 = 1$.*

Bevis. Vi ved allerede fra de ovenstående propositioner, at G har 1 som egenværdi, og at $\dim V_1(G) = 1$. Det gav os det ønskede I eksisterer og er entydigt. Vi mangler blot at bevise, at potensmetoden virker. Det vil altså sige, at for et vilkårligt valg af x_0 med ovenstående egenskaber, så vil følgen $G^k x_0$ konvergerer med I.

Lad $x_0 \in \mathbb{R}^n$ have positive indgange og $\|x_0\|_1 = 1$. Vi ved som sagt, at I findes, at $I_i = I(P_i) > 0$ og $\sum_i I(P_i) = 1$.

V er underrummet af $\mathbb{R}^n$, hvor indgangene summer til 0. Definer $v = x_0 - I$. Dermed er $v \in V$, da summen af v's indgange er nul, fordi summen af indgangene i både x_0 og i I er 1. Derfor er $x_0 = I + v$, og $G^k x_0 = G^k I + G^k v = I + G^k v$. Altså er $G^k x_0 - I = G^k v$, og et induktionsargument giver nu, at

$$\|G^k v\|_1 \leq c^k \|v\|_1,$$

hvor $0 \leq c < 1$. Samlet set har vi, at $\lim_{k\to\infty} \|G^k v\| = 0$ hvorfor $G^k x_0 \to I$ for $k \to \infty$, hvormed det ønskede er vist. □

10 Opsamling

Da Page og Brin startede Google i 1997 blev Internettet forvandlet fra at være en bunke ustrukturerede informationer, som ingen kunne finde rundt i, til at blive en – ikke fuldstændig ordnet – bunke informationer. Men det var blevet meget lettere at finde relevante informationer, hurtigt.

Hovedidéen er at få internettet til selv at ordne informationerne efter relevans. Som det er vist ovenfor er idéen simpel, men er meget anvendelig. Resultatet af en søgning bliver bl.a. sorteret efter sidernes PageRank fundet i PageRank-vektoren. Google siger selv, at PageRank er en af 200 kriterier der bliver sorteret efter. De resterende 199 kriterier er forretningshemmeligheder, som Google ikke siger noget om, ganske som Google ikke offentliggør hvad en sides PageRank præcist er.

I kølvandet på PageRank-algoritmen, er der udviklet andre algoritmer, som også bruger Internettets hyperlinkstruktur til at vurdere websiders vigtighed, fx HITS algoritmen af Jon Kleinberg der ligger til grund for Teoma søgemaskinen, der driver ask.com. Du kan selv vurdere hvilken der er bedst ved at sammenligne resultater.

11 Referencer

Litteratur

[1] David Austin. How google finds your needle in the web's haystack how google finds your needle in the web's haystackow google finds your needle in the web's haystack. URL `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank`.

[2] Kurt Bryan and Tanya Liese. The linear algebra behind google. URL `http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf`.

[3] John B. Fraleigh and Raymond A. Beauregard. *Linear Algebra*. Addison Wesley, 3 edition.