Introduktion til Grafteori

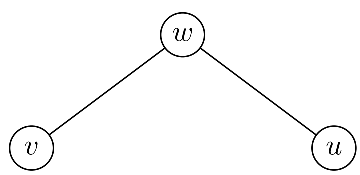
Jonas Lindstrøm Jensen (jonas@imf.au.dk)

IMF, 2007

1 Indledning

En *graf* inden for matematikken er nogle punkter, kaldet *knuder*, der er forbundet af nogle streger, kaldet *kanter*.

Hvor punkterne og stregerne er, er ikke vigtigt – det eneste vi behøver at vide er, hvilke knuder der er forbundet. Rent matematisk er en graf G derfor et par $G = (V, E)$ hvor V er en mængde af knuder, og E er en mængde af kanter. Hvis $v, w \in V$ er knuder, så er der en kant mellem v og w hvis $\{v, w\} \in E$. Dvs. hvis vi har $G = (V, E)$ og $V = \{v, w, u\}$ og $E = \{\{v, w\}, \{w, u\}\}$, så ser G således ud.



Figur 1: *Grafen G.*

En graf kan godt have en kant, der går fra et knude til sig selv, dvs af typen (v, v). Sådan en kaldes en løkke. Der kan også godt være flere kanter mellem to knuder.

Opgave 1. Tegn grafen $G = (V, E)$ givet ved $V = \{a, b, c, d, e\}$ og

$$E = \{\{a, c\}, \{d, e\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{a, e\}, \{b, e\}\}.$$

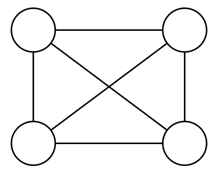
Man kan lave alle mulige skægge ting med sådan nogle grafer, og de dukker op i rigtigt mange sammenhænge, da mange ting inden for matematikken kan beskrives vha. grafer, fx en masse ting inden for matematik-økonomi. Videnskaben om grafer kaldes ikke overraskende for grafteori.

En graf med n knuder, hvor alle knuderne er indbyrdes forbundet kaldes for K_n. Dvs at K_3 er en trekant, og K_4 ser ud som på figuren nedenfor.

Opgave 2. Tegn K_6. Hvor mange kanter har K_n? (Hint: Hvad ved du om binomialkoefficienter?)

2 Centrale begreber i grafteori

Nu vil jeg lige remse nogle begreber op, man kan bruge til at beskrive en graf.



Figur 2: K_4

Grad En knudes grad er ganske enkelt antallet af kanter, der har en ende i knuden. En løkke bidrager med to til knudens grad.

Delgraf Hvis vi har en graf G, og tager nogen af knuderne og kanterne derfra (selvfølgelig kun kanter, hvis knuder vi også har valgt), så får vi en ny graf. En sådan kaldes en *delgraf* af G.

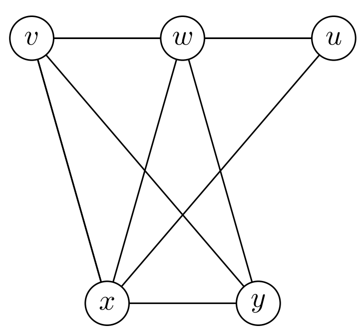
Walk En *walk* er en sekvens af knuder, hvor to på hinanden følgende knuder har en kant imellem sig. Dvs. det er en gåtur på grafen.

Sti En *sti* er en walk, hvor alle kanter man følger er forskellige. Dvs. man ikke benytter den samme kant to gange. En *simpel sti* er en sti, hvor også alle knuderne er forskellige.

Lukket sti En lukket sti er en sti, så den første og sidste knude er den samme. Dvs. vi er kommet tilbage til start.

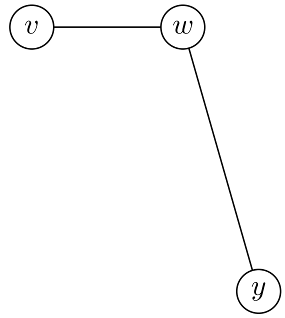
Plan En graf kaldes *plan*, hvis den kan tegnes på en måde, så ingen kanter krydser hinanden.

Eksempel 2.1. Se på følgende graf, som vi passende kan kalde G.



Figur 3: G

- Det ses, at w har grad 4 og y har grad 3. Det skrives som regel som $\deg w = 4$ og $\deg y = 3$.
- Nedenstående graf er en delgraf af G.



Figur 4: En delgraf af G

- Vi har en walk gennem knuderne v, x, y, w, x.
- Vi har en sti gennem knuderne v, x, w, y.
- Der er en lukket sti gennem knuderne v, x, y, w, v.

Opgave 3. Er G plan?

3 Et (simpelt?) grafteoretisk resultat

Vi er nu klar til at bevise nogle sætninger inden for grafteori.

Sætning 3.1. *En graf G har et lige antal knuder med ulige grad.*

Bevis. Lad os se på summen af alle knuders grad, den kan skrives som $\sum_{v \in V} \deg v$. Hvis vi tager den led for led, så vil hver kant bidrage med præcis 2 til denne sum (tænk!). Dvs at

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2\,|E|\,,$$

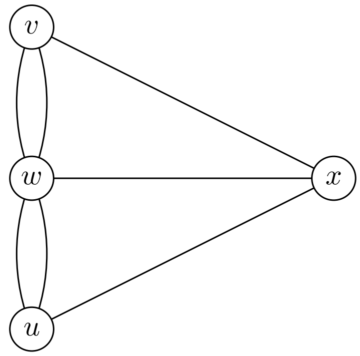
hvor $|E|$ er antallet af kanter i G. Hvis nu der var et ulige antal knuder med ulige grad, så ville summen på HS være ulige (da summen af et ulige antal ulige tal er ulige), men det er den ikke, de $2\,|E|$ er lige, så der må altså være et lige antal knuder med ulige grad. $\square$

Eksempel 3.2. Se på grafen fra figur 3. Den har netop 2 knuder med ulige grad, nemlig y og v.

4 Broerne i Königsberg

Den første der arbejdede med grafteori var den schweizeren Leonhard Euler, der i 1736 undersøgte følgende spørgsmål: Er det muligt at gå en tur i Königsberg (nu hedder byen Kaliningrad), så man krydser alle broer netop en gang, og man ender tilbage samme sted som man startede? Man kan fristes til at spørge sig selv, hvad det har med grafteori og gøre, men det er ikke så svært at svare på, for broerne i Königsberg kan betragtes som følgende graf.

Inspireret af spørgsmålet laver vi følgende definition.



Figur 5: Königsberg

Definition 4.1. En graf kaldes *Eulersk* hvis der findes en lukket sti, der bruger alle grafens kanter netop én gang.

Vi kan nu omformulere Eulers spørgsmål: Er grafen i figuren ovenfor Eulersk? Her kan man selvfølgelig prøve alle muligheder, men det er en fjollet og umatematisk måde at gribe tingene an på. Istedet vil vi vise følgende sætning.

Sætning 4.2. *En graf er Eulersk hvis og kun hvis den er sammenhængende og alle knuder har lige grad.*

Sætningen siger nu, at grafen ikke er Eulersk, så der findes altså ikke nogen gåtur rundt i Königsberg, der krydser alle broer præcis en gang. Bemærk at en graf er sammenhængende betyder det man skulle tro, nemlig at kan kan komme fra enhver knude til en vilkårlig anden. Lad os prøve at bevise sætningen.

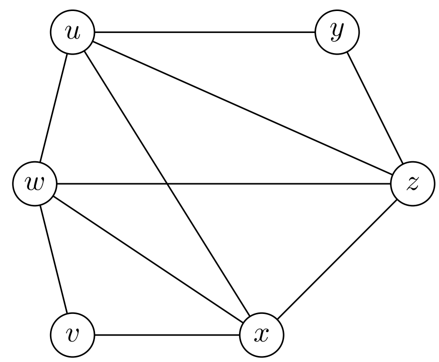
Bevis. Beviset består af to dele. Lad os først antage, at grafen er Eulersk. Vi skal så vise at den er sammenhængende og at alle knuder har lige grad.

Det er klart at grafen må være sammenhængende, ellers kunne vi jo ikke komme rundt gennem alle kanter. Lad os overveje hvorfor graden af alle knuder er lige. Hvergang den eulerske sti kommer til et punkt, går den også ud igen af en ikke allerede brugt kant. Dvs. hver gang vores sti krydser en kunde giver det 2 mere til graden, og da stien kommer igennem alle kanter, kan der ikke gemme sig kanter der kan gøre graden ulige. Altså er alle grader lige.

Lad os nu vise den anden vej. Antag at grafen er sammenhængende og at alle knuder har lige grad. Vi vil nu vise, at der findes en eulersk sti. Tag en vilkårlig knude v, og lav en sti med begyndelse i v. Vi går videre langs den sti, uden at bruge samme kant to gange indtil vi ikke kan fortsætte yderligere. Det kan kun ske i netop knuden v, da alle knuder har lige grad, så hvis vi kan kommer hen til den ad en kant, findes der også en kant ud.

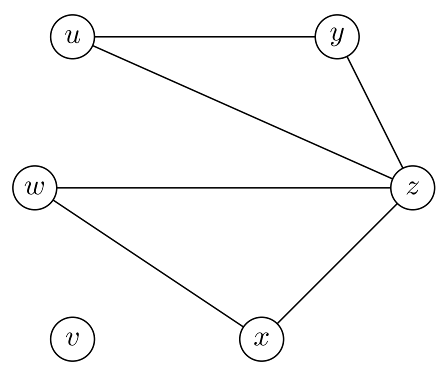
Hvis der er ubrugte kanter, kan vi bruge samme procedure som ovenfor til at lave en lukket sti på en sammenhængende mængde af disse kanter. En sådan ny sti kan kombineres med den sti vi allerede har, så hvis vi fortsætter proceduren, får vi til sidst alle kanter med, da grafen kun har endeligt mange kanter. □

Anden del af beviset er måske ikke så nemt at følge, så lad os prøve at illustrere det. Lad os se på følgende graf, hvor alle knuder har lige graf.



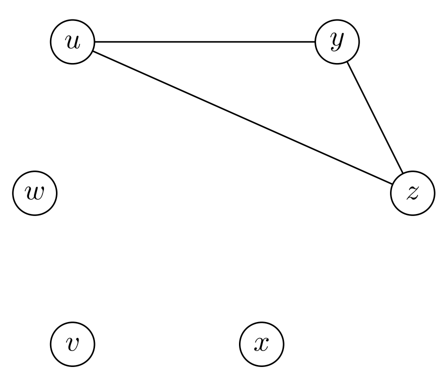
Figur 6: Graf hvor alle knuder har lige grad

Lad os tage knuden v og begynde at lave en tilfældig sti, indtil vi ikke kan komme længere. Lad os sige vi laver stien (v, w, u, x, v). Så kan vi ikke komme længere. Lad os nu se på hvilke kanter der er tilbage.



Figur 7: Ikke brugte kanter efter første sti

Lad os så tage en vilkårlig knude, lad os sige w, og forsøge at lave endnu en sti. Lad os sige vi får (w, z, x, w). Den har bl.a. knuden w tilfælles med den første sti, så tilsammen får vi stien (v, w, z, x, w, u, x, v). Så har vi følgende kanter tilbage.



Figur 8: Ikke brugte kanter efter anden sti

Her er det ikke svært at lave en sti: (u, y, z, u). Den har bl.a. knuden u tilfælles med den lange sti vi har, så ialt får vi den eulerske sti

$$(v, w, z, x, w, u, y, z, u, x, v).$$

Det er en sti, der kommer igennem alle kanter – prøv selv efter!

Sætning 4.3. *I en sammenhængende graf har to længste stier en fælles knude.*

Bevis. Lad P_1 og P_2 være to længste stier i en sammenhængende graf G. Lad P_1 være beskrevet ved knude sekvensen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ og P_2 med sekvensen $v'_0, v'_1, v'_2, \ldots, v'_k$. Bemærk at antallet af knuder er ens i de to sekvenser, da de begge er længst.
Antag at P_1 og P_2 ikke har en fælles knude.
Da G er sammenhængende må der findes en sti mellem en knude fra P_1 og en fra P_2 hvor de eneste knuder fra P_1 og P_2 er endeknuderne. Endeknuderne betegner jeg med v_i og v_j, hvor $0 \leq i \leq k$ og $0 \leq j \leq k$. Og stien kalder jeg for P_a . Lad:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \text{ Længden af stien } v_0\text{-}v_i \text{ i } P_1\text{, stien betegnes } P_{11} \\
t_2 &= \text{ Længden af stien } v_i\text{-}v_k \text{ i } P_1\text{, stien betegnes } P_{12} \\
t'_1 &= \text{ Længden af stien } v_0\text{-}v_j \text{ i } P_2\text{, stien betegnes } P_{21} \\
t'_2 &= \text{ Længden af stien } v_j\text{-}v_k \text{ i } P_2\text{, stien betegnes } P_{22} \\
t_a &= \text{ Længden af stien } P_a
\end{aligned}$$

Noter at:

$$t_1 + t_2 = t'_1 + t'_2 = \text{Længden af de længste stier i } G$$

Og at

$$t_a > 0$$

Antag unden tab af generalitet at:

$$t_1 \geq t_2 \text{ og } t'_1 \geq t'_2$$

Husk at jeg har at:

$$t_1 + t_2 = t'_1 + t'_2$$

Ved brug af disse tre ligninger kan jeg beregne at:

$$\Rightarrow t_1 = t'_1 + t'_2 - t_2$$

$$t_2 \leq t_1 = t'_1 + t'_2 - t_2 \Leftrightarrow 2t_2 \leq t'_1 + t'_2$$

Ved brug af den sidste ulighed får jeg at:

$$2t_2 \leq t'_1 + t'_2 \leq 2t'_1 \Rightarrow t_2 \leq t'_1$$

Hvis jeg så bruger dette sammen med ligheden:

$$t'_1 + t'_2 = t_1 + t_2 \leq t_1 + t'_1$$

Nu vil jeg kigge på den sammensatte sti P_{11}, P_a, P_{21}. Dette er en sti da den ikke har fælles kanter. Dens længde er: $t_1 + t_a + t'_1$ som er skarpt større end $t_1 + t_2$ da $t_a > 0$. Dette er en modstrid mod at $t_1 + t_2$ er længden af den længste sti i G.
Derfor må de to længste stier have mindst en fælles knude da det er vores eneste antagelse. $\square$

5 Afsluttende bemærkninger

En fortsættelse der bl.a. kommer til at indeholde træer og netværk kommer forhåbentlig snart. Tjek http://home.imf.au.dk/jonas. Kommentarer og rettelser kan sendes til jonas@imf.au.dk.