

Invarianter og kombinatoriske beviser

Anders Nedergaard Jensen

Invarianter optræder mange steder i matematikken f.eks. indenfor geometrien når vi skal kende forskel på en badering og en badebold, eller indenfor datalogien hvor en datastruktur skal holdes ved lige.

En invariant er en værdi knyttet til et objekt (f.eks. sandhedsværdien af et udsagn), der ikke ændrer sig når vi ændrer eller ser anderledes på objektet. F.eks. kan vi vælge en ny triangulering af badedyret eller tilføje et objekt til datastrukturen uden at invarianten ændrer sig.

I dette foredrag skal vi se eksempler på hvordan invarianter kan benyttes i beviser for kombinatoriske sætninger. Vi vil specielt interessere os for kombinatoriske puslespil.

I det velkendte brætspil Solitaire starter man med 32 pinde fordelt i 33 huller og fjerner i hver runde en pind ved at springe over den med en anden. Målet er at ende med netop én tilbageværende pind.

Et bevis for at dette problem kan løses, består af en liste af træk, der netop udgør løsningen. Det overraskende ved spillet er, at den franske version med yderligere 4 pinde og 4 huller ikke lader sig løse. Dette kan være langt sværere at overbevise sig om, men vi vil se, at der findes elegante beviser ved brug af invarianter.

Disse invariantbeviser står ikke alene. Vi kan f.eks. også vise at Rubiks terning med to ombyttede hjørner ikke lader sig løse eller svare på hvorfor en hest skal bruge mindst 6 træk for at gå mellem 2 diagonalt modstående felter på et skakbræt.