Oplæg om Poisson-fordelingen

5. April 2018

Steen Thorbjørnsen
Institut for Matematik
Aarhus Universitet

Eksponentialfordelingens række-udvikling

For ethvert reelt tal λ gælder der, at

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Det betyder, at summen $\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!}$ kommer vilkårligt tæt på e^{λ}, hvis blot N er stor nok.

Eller sagt på en anden måde: Afstanden

$$\left| \mathrm{e}^{\lambda} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} \right|$$

bliver vikårligt lille, hvis blot N er stor nok.

Specielt følger det, at

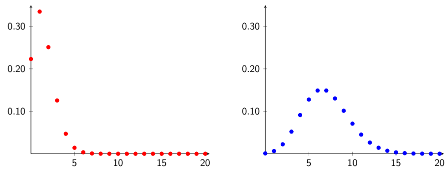
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1.$$

Definition af Poisson-fordelingen

Lad λ være et givet positivt reelt tal.

En diskret stokastisk variabel X med udfaldsmængde $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ siges da at være *Poisson-fordelt* med parameter λ, hvis der for ethvert n i $\{0, 1, 2, \dots\}$ gælder, at

$$P(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$



Poiss(1.5) vs. Poiss(7).

Anvendelser af Poissonfordelingen

- antallet af taxaer der passerer Langelandsgade nr. 108 mandag formiddag mellem kl. 10 og kl. 11.
- antallet af telefonopkald til Yousee's servicetelefon fredag aften mellem kl. 21 og kl. 23.
- antal trafikulykker pr. dag i et givet område.
- antal fødsler pr. dag i et givet område
- antal radioaktive partikler registreret af en Geigertæller i løbet af en time.

Poissons Grænsesætning

Betragt for hvert n i $\mathbb{N}$ en binomialfordelt stokastisk variabel X_n med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter $p_n \in \,]0,1]$.

Betragt yderligere en stokastisk variabel X, der er Poissonfordelt med parameter $\lambda \in \,]0,\infty[$.

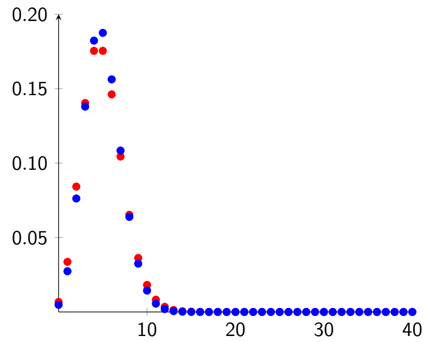
Hvis $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$, da gælder der for ethvert k i $\mathbb{N}_0$, at

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

eller helt udskrevet:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Illustration af Poissons Grænsesætning



Poisson(5) vs. Binomial($40, \frac{1}{8}$)

Bevis for Poisson's Grænsesætning

Antag, at $n \cdot p_n \to \lambda$ for $n \to \infty$. Dette medfører, at $p_n = \frac{1}{n}(n \cdot p_n) \to 0$ for $n \to \infty$.

Betragt herefter et fast k i $\mathbb{N}_0$. Vi betragter kun n så store, at $k \leq n$ og $p_n < 1$. Vi finder så, at

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{\left(\prod_{j=0}^{k-1} p_n(n-j)\right)\cdot(1-p_n)^n}{k!\cdot(1-p_n)^k}.
\end{aligned}$$

Bevis for Poisson's Grænsesætning (fortsat)

Her gælder der, at

$$\prod_{j=0}^{k-1} p_n(n-j) = \prod_{j=0}^{k-1} n \cdot p_n(1-\tfrac{j}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \prod_{j=0}^{k-1} \lambda\cdot(1-0) = \lambda^k,$$

og at

$$(1-p_n)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^k = 1.$$

Vi bemærker endelig, at

$$\begin{aligned}
\ln\left((1-p_n)^n\right) = n\ln(1-p_n) &= -n\cdot p_n \frac{\ln(1-p_n)-\ln(1)}{-p_n} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} -\lambda\cdot\ln'(1) = -\lambda,
\end{aligned}$$

således at

$$(1-p_n)^n = \exp\left[\ln\left((1-p_n)^n\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Bevis for Poisson's Grænsesætning (fortsat)

Det følger således, at

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{\left(\prod_{j=0}^{k-1} p_n(n-j)\right) \cdot (1-p_n)^n}{k! \cdot (1-p_n)^k} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k! \cdot 1} \\
&= \frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}.
\end{aligned}$$